EXERCICE 4 **5 points**

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère les points

$$A(4 ; -1 ; 3), \quad B(-1 ; 1 ; -2), \quad C(0; 4; 5) \text{ et } D(-3 ; -4 ; 6).$$

1. **a.** Vérifier que les points A, B, C ne sont pas alignés.

   On admet qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $29x + 30y - 17z = 35$.

   b. Les points A, B, C, D sont-ils coplanaires ? Justifier.

On admet que lorsque quatre points ne sont pas coplanaires, il existe un unique point situé à égale distance de ces quatre points.
L'objectif de cet exercice est de déterminer le point H se situant à égale distance des quatre points A, B, C, D.
On définit le plan médiateur d'un segment comme le plan passant par le milieu de ce segment et orthogonal à la droite portant ce segment. C'est l'ensemble des points équidistants des extrémités de ce segment.

2. Soit P_1 le plan médiateur du segment [AB].

   a. Déterminer les coordonnées du milieu du segment [AB].

   b. En déduire qu'une équation cartésienne de P_1 est : $5x - 2y + 5z = 10$.

3. On note P_2 le plan médiateur du segment [CD].

   a. Soit M un point du plan P_2 de coordonnées $(x ; y ; z)$.
   Exprimer MC^2 et MD^2 en fonction des coordonnées de M.
   En déduire qu'une équation cartésienne du plan P_2 est : $-3x - 8y + z = 10$.

   b. Justifier que les plans P_1 et P_2 sont sécants.

4. Soit Δ la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{rcr} x & = & -2 - 1,9t \\ y & = & t \\ z & = & 4 + 2,3t \end{array}\right. \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

   Démontrer que Δ est la droite d'intersection de P_1 et P_2.

On note P_3 le plan médiateur du segment [AC].
On admet qu'une équation cartésienne du plan P_3 est : $8x - 10y - 4z = -15$.

5. Démontrer que la droite Δ et le plan P_3 sont sécants.

6. Justifier que le point d'intersection entre Δ et P_3 est le point H.